**每個人都該學數學嗎？--兼談****《108數學領綱》**

臺灣大學數學系 張鎮華 2020年3月14日

數學很重要，

並不只是因為要用它來理解實存世界，

而是數學能提供更多東西—

它教導用精準有序的方式進行抽象思維。

$- $Ron Aharoni 《小學算術教什麼，怎麼教》

1. **吉拉忙碌的一天**

鬧鐘響了，吉拉起床後順手關了鬧鐘，時間是早上5：00。今天將是忙碌的一天，先要到台中參加三姐夫的追思禮，再回草屯老家掃墓，然後去看小學老師。

梳洗完畢，到巷口的全家便利商店買三明治當早餐，需要兩份，一份給二哥；每份兩個三明治，外加一盒400 毫升的果汁，共花了214元。因為太早還沒有公車和捷運，就上了計程車，以便來得及6：00和二哥在台北車站會合，花了195元車資。買了高鐵6：30往台中的車票，兩人的座位剛好是3車14排D、E號。因為是直達車（車次203，途中僅停靠板橋站），7：18就抵達台中，總共費時48分鐘。………

我們日常生活就像吉拉一樣，少不了數字。沒有數字，我們不知道工作的時間、買東西的價位、汽車加油的容量、個人的身高體重、房子的面積。可以說，不學數字，我們日常生活幾乎無所依據，無法與他人對話。

翻開《108數學領綱》，我們就可以發現，學習內容的第一條N-1-1就是「一百以內的數」，隨後有數的加減乘除法、更大的數及分數，並配合了許多實用的條目，包括「解題：1元、5元、10元、50元、100元」、「長度」、「日常時間用語」、「解題：100元、500元、1000元」、「長度：公分、公尺」、「容量、重量、面積」、「鐘面的時刻」、「時間：年、月、星期、日」、「面積：平方公分」、「容量：公升、毫升」、「重量：公斤、公克」、「時間：日、時、分、秒」、「長度：公里」、「角度：度」、「面積：平方公尺」、「體積：立方公分」、「面積：公畝、公頃、平方公里」、「重量：公噸」、「體積：立方公尺」、「解題：地圖比例尺」。另外還有實用的統計圖表相關的條目。

可以說，小學的數學是為日常生活所需而設。既然是這樣，一個要深思的問題是，為何有許多人逐漸對數學學習心生畏懼？是數學難，還是生活難？

1. **小女兒的疑惑**

向新朋友自我介紹，說我在學校教數學時，有時會得到的回應是「我對數學最不在行了」。很容易就聽到人們害怕數學的聲音。我的小女兒在國中時，有一天就問我：「我們為什麼要學這麼多數學？好像都沒什麼用處。」那天，我們把她正在學習的所有科目都拿出來檢視，發現好像大部份的科目都「不太有用」。

國中開始的數學，逐漸告別小學數學大量與生活接軌的型態，進入新一階段的抽象，迎向更高階的數學，準備下一階段更高深的應用。用單維彰教授的說法，數學當作一種語言，國小階段的數學與母語同步學習，國中階段是母語轉到外語的緩衝，高中階段就如外語般的學習。

我們一再被告知要學數學，這後面一定有一些道理。縱使是高中過後，在大學要學數學也被強調。舉例來說，在臺灣大學，除了文、法學院以外的大一學生，都被要求修習微積分甲或微積分乙，而文、法學院的學生雖然不學微積分，他們也都要選修通識教育「量化分析與數學素養領域」的一門課。意思是說，所有人都應該學數學，只是多寡深淺因需求而異。

數學系對外宣傳時，也遍尋數學在各種領域的應用。典型的例子包含：圖論應用於網絡分析，拓撲學應用於電路分析，群論應用於結晶學，微分幾何應用於規範場，自動控制理論應用於計算，黎曼幾何應用於相對論，數理邏輯應用於計算機，最小二乘法應用於飛機起降時自動控制，數字合成計算機輔助應用於X射線斷層成像技術（1979年數學家獲得諾貝爾醫學獎），數論應用於密碼學，博弈論、概率論、統計學應用於經濟學，線性規劃用於生產安排調度。

數學除了日常生活的實用以外，還有這許多各領域的高階應用，這就是Aharoni所說的「用它來理解實存世界」。而這些高階的應用，涉及的數學甚多，中學的數學只是其基礎，所以在這一階段的數學學習，應該著重在概念的理解，切忌過多數學題型的堆砌，減損了基礎的鍛鍊，甚至被過度延伸的數學知識恐嚇，害怕了數學。

因此，在高中階段的數學學習，應如同臺灣大學的設計一樣，所有人都該學習數學，但宜因應一個人的適應性及其生涯規劃，學習符合個人需求的數學。

基於這樣的道理，《108數學領綱》在高中的設計是，高二起分三軌學習。

1. **數學教導用精準有序的方式進行抽象思維**

正如Aharoni所說，數學除了可以用來理解實存世界以外，更重要的是，它教導用精準有序的方式進行抽象思維。

我們小時候先會數5個蘋果、5支鉛筆、5顆棋子、5個人，然後逐漸抽象出5這個數。我們先會算3個蘋果加2個蘋果，結果是5個蘋果；先會算3支鉛筆加2支鉛筆，結果是5支鉛筆；逐漸的就抽象出3+2=5。當抽象完成之後，人們逐漸忘記這些抽象的過程，被抽象出來的概念成為習慣以後，遂和前一層次的概念交互使用無礙。

抽象的過程和習慣是重要的，有許多新的事物和情境，等待著我們去克服，到處都有抽象的需求。舉例來說，有了正整數的概念以後，伴隨著對於將一個蘋果切半、將一塊披薩分六片、將一兩重的藥粉分十份等的實用，人們抽象出分數的概念。伴隨著欠債、反方向、抵消等實用，人們抽象出負數的概念。經由屢次類似下列算式的計算經驗，人們抽象出分配律的概念：

$12×3=\left(10+2\right)×3=10×3+2×3=30+6=36$。

數學的抽象歸結到秩序、推廣，以及簡潔的表示法。

數學的這種抽象過程，是人類思想精煉的範例，但絕非唯一。縱使在其他的實例中，也需要有抽象的能力。舉例來說，看過牧羊犬、柴犬、八哥犬、鬥牛犬、博美犬等之後，人們抽象出犬的概念。又如，看過阿拉伯馬、美洲野馬、汗血馬、花馬、克來茲代馬等之後，人們抽象出馬的概念。如果一般而論抽象有用，那麼數學會更有用，因為數學把抽象做到極致。

教導抽象之於數學，不亞於它的實務應用。因此，數學學習不能把它單單視為學科知識的學習，更須時時練習抽象思考、邏輯推理。換言之，數學知識的學習應該視為抽象思維的練習，多一點內容就多一次練習。抽象思維的練習，應該優先於內容的累積。

基於這樣的理念，對於數學內容需求不同的各類人，不宜教給他太多將來可能不需要的內容。反過來，應該選擇最基礎、跟他將來最有關的數學內容，以漸進的方式，時時在抽象思維、邏輯推理的程序上教導。這也是數學分軌學習的理論根據。縱使是在其他領域，也應該有類似的氛圍。

1. **民國72年版的《高中數學課程標準》**

高中數學分軌學習的概念很早就有。民國72年版的《高中數學課程標準》就已經做了「第一次努力」。當時的高三選修（必選）數學，分成三類：

* 《理科數學》為「有志攻讀理、工、農、醫方面的學生」而設計。
* 《普通數學》的「內容偏重數學的基本知識，以供有志攻讀藝文方面的學生選修之用」。
* 《商科數學》，為「有志攻讀法、商、社會科學」的學生而設計。

這三類課程，本可以分別對應民國43年起實施的聯考甲組（理工）/丙組（農醫）、乙組（文）、丁組（法商）。可是，大學聯考就從民國73年起改變了分類方式，把乙、丁組合併成第一類組（文法商），指定的數學考科為「數學乙」（指的是《商科數學》的「社會組數學」）。如此一來，毀損了當年課程標準的設計美意，使得《普通數學》幾乎不曾開課。此變局影響至今，間接導致高中數學教師普遍缺乏支援文史哲藝的數學教育經驗，而那些領域的專業青年則缺乏適當的數學素養，這種可惜的現象對國家的社會與經濟造成莫大的損傷，至今持續發生。《108數學領綱》想要匡正這種可惜的狀態，做出「第二次努力」。

分成四類組的作法，想必有其邏輯。可是不論如何，該邏輯可能並未考慮需求的均衡性。以民國73年為例，當年的大學總招生量是31,468人，四個類組的招生量分別是第一類組（文法商）13,689人、第二類組（理工）12,021人，第三類組（醫）4,613人，第四類組（農）1,145人。

到了民國101年，大學招生量提高到106,572人，其中文史哲藝專業的科系招生量大約40,000人。這麼大量的學生，未能修習當年規劃的《普通數學》課程，卻需要學習《數學乙》課程，大學入學考「數學乙」，讓他們的學習產生痛苦，也造就了導致許多人對《數學乙》的誤會與不諒解。為減緩此問題，實施99課綱後，大考中心公布的命題「星號」備註，使得「數學乙」考科內容只涵蓋《數學乙》少部份的內容，這固然減輕文史哲藝學生的壓力，但也在「有考才教」的風氣下，使得《數學乙》的教學支離破碎。根據一些教微積分老師的經驗，目前商科學生在高中階段的數學基礎嚴重的「準備不足」。

高中數學教學的這個危機，到《108數學領綱》有了一個轉機。這個轉變始自民國103年初，《總綱》對於高中學分保留四分之一給學校當作選修的爭論。

1. **民國103年中小學課程綱要的《總綱》**

民國103年初，中小學課程綱要的《總綱》草案出爐，那是一份規範課程種類及各科教學時數的文件。當時高中的課程時數有一個重大改變，一向由教育部規定的必修學分數，這次保留四分之一，留給高中自行規劃校級選修課。這是一個很好的理想，不過一開始大家都很不認同，數學領域的人更是反彈。舉例來說，本來國文必修24學分、英文必修24學分、數學必修16學分加上高三選修8學分，經過四分之一的保留後，必修學分變成國文18學分（另加中國文化基本教材2學分）、英文18學分、數學12學分。雖然還保留有一些學分給高中自主規劃，但是大家都看不到如何做，只看到必修學分大幅刪減，產生許多恐懼。

高中數學老師看到必修學分數降到12，更是驚慌失措，有人找到「中華民國數學會」尋求「主持公道」，我受數學會之命，成立「反課綱小組」。我們曾找來中央研究院的院士幫忙發聲，成功大學也曾展開全國各界連署，我還上電視和國家教育研究院的曾士杰副院長公開辯論。出乎我意料的是，電視辯論結束後，副院長好意開車送我回家，在車上，他邀請我召集接下來的《108數學領綱》的研修，我問他是不是要封我的口，他說是經各界推薦後評估的結論。

我回去以後和林長壽院士商討此事，他建議我接受這個任務，希望有人在外面發聲，也要有人進入體制內了解實況，於是我接受了這個邀請。

在體制內，我向他們分析，開放高中選修課要有適當配套，實施得好確實是一大改進；而數學教育先進在更早之前，就已經認識到選修課的必要性，所以數學早早就把三分之一的必修學分規畫為高三的選修課，比現在規劃的四分之一更多。國教院再度召集包含數學會、招聯會、家長團體等的會議討論，幾經波折，數學是唯一保留為原來學分設計的領域，數學必修16學分加上高三選修8學分。

國教院的這個決定只是提議，因為《總綱》必須經過教育部的課審會決議。我受國教院之命到課審會解釋這個「數學必修16學分加上高三選修8學分」的提議，才發現其實早就有一個討論案，專門討論數學的學分數，國教院的這個提議是這個討論案的第六個提議。會中，各個提議由提案人逐一說明，意見分歧，其中第一個提議與我們的理念最相似。我最後解釋第六個提議，令人興奮的是，我說完之後，第一個提議的提案委員，立刻就提出「如果第六個提議能將高二分『版』改為分『類』，我就將第一個提議與第六題意提議合併」，我當下接受，我們的提議就以最高票勝出其他提議甚多。這就是108之後高二課程分A、B兩類，有別於99課綱僅用打雙圈來分版的由來。

1. **《108數學領綱》高中分三軌學習的設計**

《108數學領綱》在11年級設計A、B兩類差異化課程，滿足學生的不同學習需求；在12年級規劃加深加廣選修課程分甲、乙兩類，為學生往後的大學學習做好銜接與準備。11、12年級的兩類數學各有特色，學生可依其生涯規劃及適應性，每一年級擇一搭配修習。有關「高中數學領域必選修課程與職涯進路關係表」，可參考《數學領域課程手冊》第12~17頁的說明。

有關11A、11B、12甲、12乙的內容，對於《108數學領綱》的學習內容條文，《數學領域課程手冊》第550~675頁有詳細解析，是老師教學很好的參考，其中各學習內容條目的分析均包含「先備」、「連結」、「後續」，提供條目之間的先後與連結關係。就先備知識而言，學好11A數學內容，就可以學習12年級數學甲；學好11A或11B數學內容，都可以學習12年級數學乙；學好11B數學內容，想要學習12年級數學甲，尚需自行補足四條11A的學習內容：G-11A-5、F-11A-1、F11A-3、F-11A-4，並達到它們對應的學習表現。

11B的內容比11A少了幾條比較困難的項目。根據前面的分析，學好其內容就足夠銜接數學乙，而學好數學乙就做好了後續許多大學科系的升學準備。11B的設計有一個優點，對許多學生來說，本來就不需要11A多出來的那些内容，11B讓他們有機會從容地學習，充分吸收其內容，為後續的學習奠定穩固的基礎。基於以上的分析，我有下面四點建議，提供高中師生參考。

1. 學生可依個人生涯規劃及適應性，於11年級修習11A或11B。
2. 11年級修習11A後，可在12年級選修數學甲、數學乙或多元選修課程。
3. 11年級修習11B後，可在12年級選修數學乙、多元選修課程或不選修任何數學課程。
4. 11年級修習11B後，想在12年級選修數學甲者，須自行補足11A的學習內容G-11A-5三角的和差角公式、F-11A-1三角函數的圖形、F-11A-3矩陣的應用、F-11A-4指數與對數函數。

希望以上的建議有助於高中學校對於二、三年級的課程安排，以及學生對於課程選修的規劃，期能達到適性揚才的教育目標。